

**Bureau d'Enquêtes sur les Accidents de Transports Terrestres**

**Reconstitution numérique de l'incendie du 4 juin 2005  
dans le tunnel routier du Fréjus et étude de scénarios alternatifs**

**Rapport final**

**Annexe  
Introduction à la mécanique des fluides numérique (CFD)**

**Septembre 2007**



*Liberté • Égalité • Fraternité*

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

ministère de l'Écologie  
du Développement  
et de l'Aménagement durables



# 1 Les équations de Navier-Stokes

## 1.1 Énoncé et signification physique

La dynamique des fluides est décrite de manière exacte par un système d'équations dites de Navier-Stokes, traduisant mathématiquement les principes physiques élémentaires de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Lorsque des échanges thermiques ont lieu au sein du fluide ou aux frontières du domaine, on leur adjoint une équation traduisant la conservation de l'énergie.

Les équations de Navier-Stokes « minimales » en trois dimensions s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = S_m$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + S_q$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $u$  la vitesse,  $P$  la pression,  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide,  $S_m$  la source de masse locale et  $S_q$  la source de quantité de mouvement locale.

Selon le régime d'écoulement et les propriétés du fluide considéré, on peut effectuer certaines approximations dans les équations. Dans le cas de l'incendie, on adoptera la formulation à masse volumique fortement variable et à faible nombre de Mach.

## 1.2 Problèmes posés par la résolution des équations de Navier-Stokes

### 1.2.1 Non-linéarité et absence de solutions analytiques connues

La non-linéarité des équations de Navier-Stokes rend leur résolution difficile. Des solutions analytiques sont connues dans un petit nombre de cas simples, mais aucune preuve de l'existence et de l'unicité de la solution n'a encore été publiée.

La seule possibilité à l'heure actuelle est donc la résolution approchée par des méthodes numériques. À chaque pas de temps, le système aux dérivées partielles est transformé en système linéaire (la dimension du système étant égale au nombre de mailles), lequel est également résolu numériquement. Il existe de nombreuses méthodes, à la fois pour l'étape de discrétisation et pour l'étape de résolution du système linéaire.

### 1.2.2 Formation de chocs, instabilités et turbulence

Les équations de Navier-Stokes ont très souvent des solutions instables. Physiquement, ces instabilités peuvent avoir un aspect « ordonné » (instabilité convective de Rayleigh-Bénard, instabilité de cisaillement de Kelvin-Helmholtz, etc.) mais dégèrent le plus souvent en instabilité généralisée : l'écoulement devient turbulent. On observe alors des tourbillons dans une large plage d'échelles spatiales (ou fréquentielles). La résolution de tous ces

tourbillons nécessiterait un maillage au moins aussi fin que l'échelle spatiale des plus petits tourbillons (appelée échelle de Kolmogorov). Pour les simulations d'incendie, cela correspondrait à une taille de maille de l'ordre du millimètre, soit un nombre de mailles de l'ordre de  $10^{14}$  pour un domaine de  $10 \times 10 \times 10$  m, ce qui est largement hors de portée des calculateurs actuels. On emploie pour cette raison des modèles de turbulence (voir section suivante)

## 2 Les sous-modèles physiques employés en simulation CFD

### 2.1 Modélisation de la turbulence

Nous avons vu que tous les tourbillons ne peuvent être simulés directement, en tous cas pour de grands domaines physiques et/ou des nombres de Reynolds élevés. On utilise donc des modélisations spécifiques afin de prendre en compte l'influence de la turbulence sur l'ensemble de l'écoulement. Nous détaillerons ici les modèles dits aux moyennes de Reynolds. Dans cette approche, on décompose les variables en deux composantes : la valeur moyenne de la variable et les fluctuations autour de cette moyenne. En introduisant cette décomposition dans les équations de Navier-Stokes, on obtient des équations similaires pour les valeurs moyennes, avec des termes supplémentaires et inconnus dépendant des fluctuations. La modélisation de la turbulence a pour objet d'évaluer ces termes supplémentaires.

La turbulence tend à homogénéiser les champs des différentes variables physiques (température, vitesse, etc.) et s'apparente donc à un phénomène diffusif. On fait généralement l'hypothèse d'isotropie de la turbulence ; le phénomène peut alors être modélisé par une « viscosité turbulente » qui s'ajoute à la viscosité du fluide. La viscosité turbulente est définie localement.

Les modèles les plus courants sont les modèles à deux équations, dont le plus connu est le modèle  $k-\epsilon$ . Dans ce modèle, la viscosité turbulente est fonction de l'énergie cinétique turbulente  $k$  (proportionnelle à la moyenne du carré de la vitesse fluctuante) et de sa dissipation  $\epsilon$ . Pour chacune de ces deux grandeurs, on écrit une équation de transport à partir des équations de Navier-Stokes. Il reste quelques termes sources inconnus qui sont obtenus de manière semi-empirique. Pour la simulation des écoulements à masse volumique fortement variable comme ceux générés par les incendies, l'hypothèse d'isotropie de la turbulence n'est pas vérifiée. Il faudrait donc en théorie utiliser des modèles plus généraux comme les modèles aux tensions de Reynolds, mais ces derniers sont également difficiles à caler et demandent des temps de calcul considérablement plus longs. Le bénéfice est donc peu évident.

### 2.2 Modélisation des transferts thermiques convectifs et radiatifs

Il existe différents types de conditions aux limites thermiques, notamment en ce qui concerne les parois. Pour nos applications, les deux principales sont :

- la modélisation directe de la paroi solide (conduction), avec un coefficient d'échange entre fluide et solide fonction des conditions d'écoulement (vitesse, turbulence) ;
- un coefficient d'échange spécifié ainsi qu'une température extérieure (hypothèse de paroi mince).

Les échanges radiatifs peuvent également être modélisés avec différents degrés de précision. La méthode la plus adaptée aux calculs d'incendie semble être celle des tirs de

rayons, qui permet de prendre en compte des échanges à longue distance (entre le foyer et les parois par exemple).

### 2.3 Modélisation des réactions chimiques

Lorsqu'on s'intéresse à des réactions chimiques au sein de l'écoulement, il faut résoudre des équations supplémentaires de conservation de la fraction massique des différentes espèces présentes. Les termes sources de ces équations sont fonction des taux de réaction. Toute la difficulté consiste à évaluer ces taux de réaction.

Un premier cas limite concerne les réactions lentes : le temps caractéristique de la réaction est nettement supérieur au temps nécessaire pour mélanger les réactifs à l'échelle microscopique. On utilise alors les lois classiques de la cinétique chimique. Le second cas limite, qui s'applique généralement aux réactions de combustion, est celui de la cinétique rapide ; le taux de réaction dépend donc du mélange entre les réactifs, et donc de la turbulence. Il existe plusieurs modèles pour cela. Les principaux problèmes rencontrés sont la stabilité, le temps de calcul et la sensibilité au maillage.

À moins de disposer de très gros moyens de calcul, il est difficile de d'utiliser un modèle de combustion pour la simulation d'un incendie dans un domaine physique étendu. La représentation du foyer par une source de chaleur semble alors plus appropriée, la fiabilité des résultats n'étant pas mise en cause sauf peut-être au voisinage immédiat du foyer.

## 3 Aspects numériques

### 3.1 Discrétisation des équations

L'opération de discrétisation consiste à transformer le système d'équations aux dérivées partielles en système linéaire. Cette opération est effectuée à chaque pas de temps. L'approximation des dérivées temporelles et spatiales se fait par des *schémas numériques* ; il en existe un grand nombre. Un schéma numérique performant doit être stable, précis et peu consommateur en temps de calcul.

Les codes de calculs industriels utilisent généralement des schémas d'ordre 1 ou 2, que ce soit en espace ou en temps. Pour un schéma d'ordre 1, l'erreur de discrétisation (écart entre la valeur réelle de la dérivée et son approximation) varie linéairement en fonction du pas de discrétisation lorsque celui-ci tend vers 0. Pour un schéma d'ordre 2, la variation de l'erreur est quadratique. Un schéma d'ordre 2 est donc plus précis qu'un schéma d'ordre 1. Malheureusement, il est également moins stable (formation d'oscillations parasites de la solution numérique) et un peu plus gourmand en temps de calcul. Certains codes proposent un schéma optimisé ; il s'agit d'un mélange d'ordre 1 et d'ordre 2, ajusté localement pour avoir la meilleure précision possible sans compromettre la stabilité.

Des schémas d'ordre supérieur existent, mais ne sont généralement utilisés que par les codes de recherche à haute résolution. Leur utilisation n'est pas pertinente avec des modèles de turbulence classiques.

### 3.2 Définition et mesure de la convergence

Le calcul est généralement réalisé par itérations successives. À chaque itération, on peut mesurer la différence relative entre les deux membres de chaque équation du système linéarisé. Cette différence est appelée résidu. Si le résidu diminue, le calcul converge. Il existe cependant des cas où le calcul converge vers une solution non physique.

### 3.3 Influence du maillage

La qualité du maillage est déterminante pour la rapidité de la convergence et la fiabilité de la solution. Il est important de raffiner le maillage aux endroits où les gradients de certaines variables sont forts : près des parois (fort gradient de vitesse), aux interfaces entre les couches de fluide (fort gradient de température), autour des obstacles (fort gradient de pression), etc.

Deux types principaux de maillage sont employés : le maillage tétraédrique et le maillage hexaédrique. Le maillage tétraédrique est particulièrement adapté aux géométries complexes pour lesquelles il fait gagner beaucoup de temps de préparation. On peut en effet, grâce aux algorithmes inclus dans les outils de maillage actuels, le générer de façon fortement automatisée. En revanche, il doit se composer de tétraèdres assez réguliers pour obtenir une bonne convergence du calcul. Le maillage hexaédrique est plus long et plus compliqué à générer. En revanche, sur des géométries présentant un fort déséquilibre entre les trois

dimensions de l'espace (dont le tunnel est un très bon exemple), le nombre de cellules peut être fortement réduit par rapport à un maillage tétraédrique car il est possible d'utiliser des mailles très déformées (à condition de garder un angle raisonnable entre les faces). Le maillage hexaédrique réduit également le phénomène de diffusion numérique (diffusion artificielle introduite dans la solution du fait de la discrétisation) et est donc apprécié lorsque l'exigence de précision est grande.

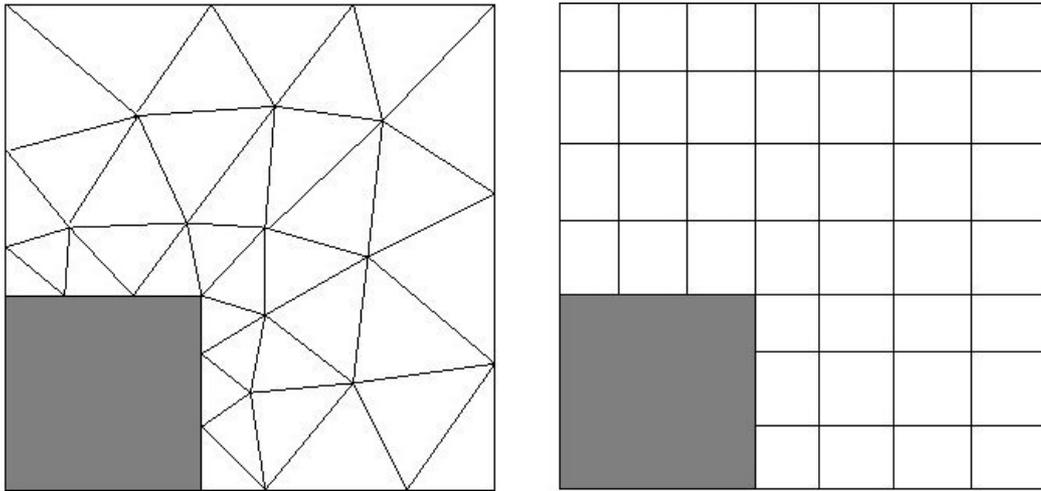


Figure 1 : Vues 2D d'un maillage tétraédrique (à gauche) et d'un maillage hexaédrique (à droite).